

* 为何从能 $\times$ 从?
分块原则, 实则是对
两个方程组的单独处理
矩阵乘法满足结合律

列线性组合
把右边拆成列, 把左矩阵当作
系数矩阵, 右只是两种分
块情况

$$\textcircled{1} \quad 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10+21 \\ 40+63 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 8+18 \\ 32+54 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 4 & a \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

行线性组合
把左边拆成行
此时右边提系数矩阵
左边同过 a 与
b 组合, 左也
只是分块的情况

Intro to LA

乘法

Left 行向量 $\xleftrightarrow{\text{合并同类项}}$ Right 列向量

$\begin{bmatrix} x & x \\ x & x \end{bmatrix}$
主元

线性组合

$$[A](x) = [B]$$

数学结构限制

$\begin{bmatrix} \square & \square \end{bmatrix}$

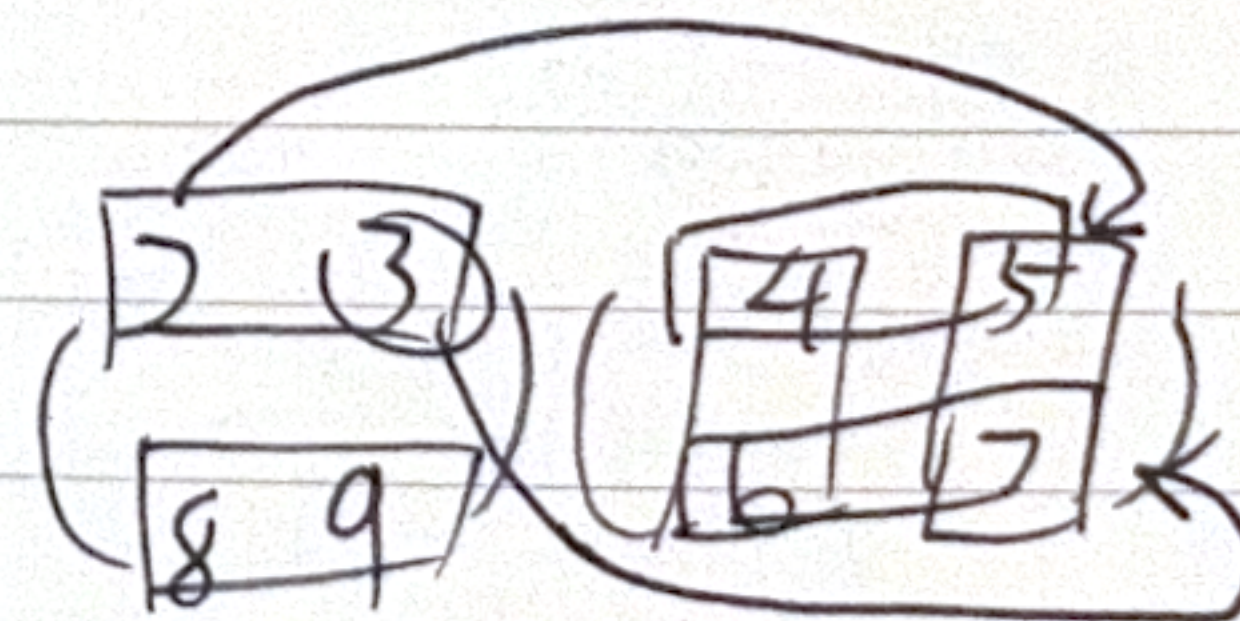
$$m \cdot n \cdot n \cdot p = m \cdot p$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 4y = 6 \end{cases}$$

右 $\rightarrow$ 左 $\parallel$ 左 $\rightarrow$ 右

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} y = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \textcircled{x} \\ \textcircled{y} \end{cases}$$



$\square \square$ 是由方程组的
数学结构决定的

① 右 $\rightarrow$ 左: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

② 左 $\rightarrow$ 右: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

置换, 转置, 向量空间

置换

$$A = LU \rightarrow PA = LU$$

$n \times n$

amount: $n!$

all invertible

$$\star \boxed{P^{-1} = P^T}$$

 stimes. $P^{-1} = P$
 $\Rightarrow P^T = P$

转置

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

$$(R^T R)^T = R^T R^{TT}$$

 反序
 (与逆一样)

$$\text{对称矩阵: } A^T = A$$

$$\text{ex. } \begin{bmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 1 & 2 & 9 \\ 7 & 9 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\star R^T \cdot R \text{ is symmetric}$$

向量空间

$$\text{Ex. } \mathbb{R}^2 = \text{二维实向量}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi \\ e \end{pmatrix}$$

① 对加法, 数乘, 线性组合 封闭

子空间: 在内部, 满足

$$\begin{matrix} S \cap T & \checkmark \\ S \cup T & \times \end{matrix}$$

矩阵构造空间 $\mathbb{R}^3$ 的 (子空间) (列空间)

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

记 $C(A)$
作

任何乘法 $Ax = b$

列空间 对于 A 而言

$$\text{当 } Ax = b$$

b 属于 A 列空间时有解

零空间对于 A 而言



Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No. _____

Date / /

RREF 矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

主元 1 下都是 0

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

解向量空间

$$c \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

自由列

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

$= \text{rref}(A)$

Rx

$\text{秩} = 0$ 相反数

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No. _____

Date / /

RREF form

$$R = \begin{pmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{主行} \\ \text{主列} \end{array} \right.$$

主列 自由列

$$Rx = 0$$

零空间矩阵 (解空间)

$N = 0$

$$N = \begin{bmatrix} -F \\ I \end{bmatrix}$$

基础解系

解空间

N_c 空间

$$\begin{pmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -F \\ I \end{pmatrix}$$

$$-F(I) + I(F)$$

$$-FI + IF = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

满秩方阵

$$R = I$$



$r = m = n$	$r = \overset{n}{\cancel{m}} < m$	$r = m < n$
$R = I$	$R = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix}$	$R = [I \ F]$
1 solution for $Ax = b$	0 or 1 solution	1 or ∞ solutions

$$r < m, r < n$$

$$R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Lec 9 线性相关性

$$c_1 \overset{c_2}{\cancel{c_1}} + \lambda_2 \overset{c_3}{\cancel{c_2}} + \lambda_n \overset{c_n}{\cancel{c_3}} = 0$$

除了 c 为 0

则线性相关

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$$

$$x(A) + y(B) + z(C) = 0$$

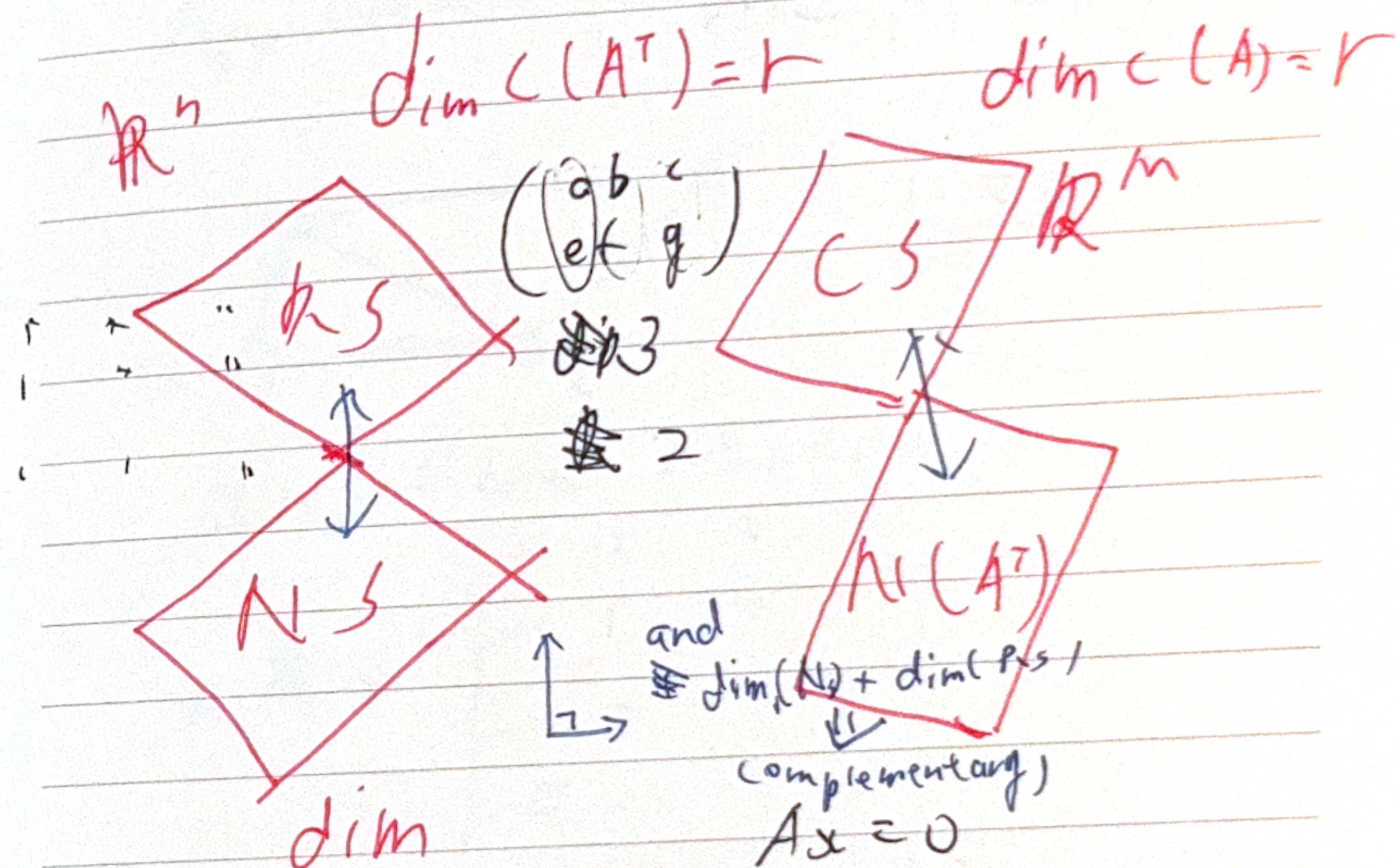
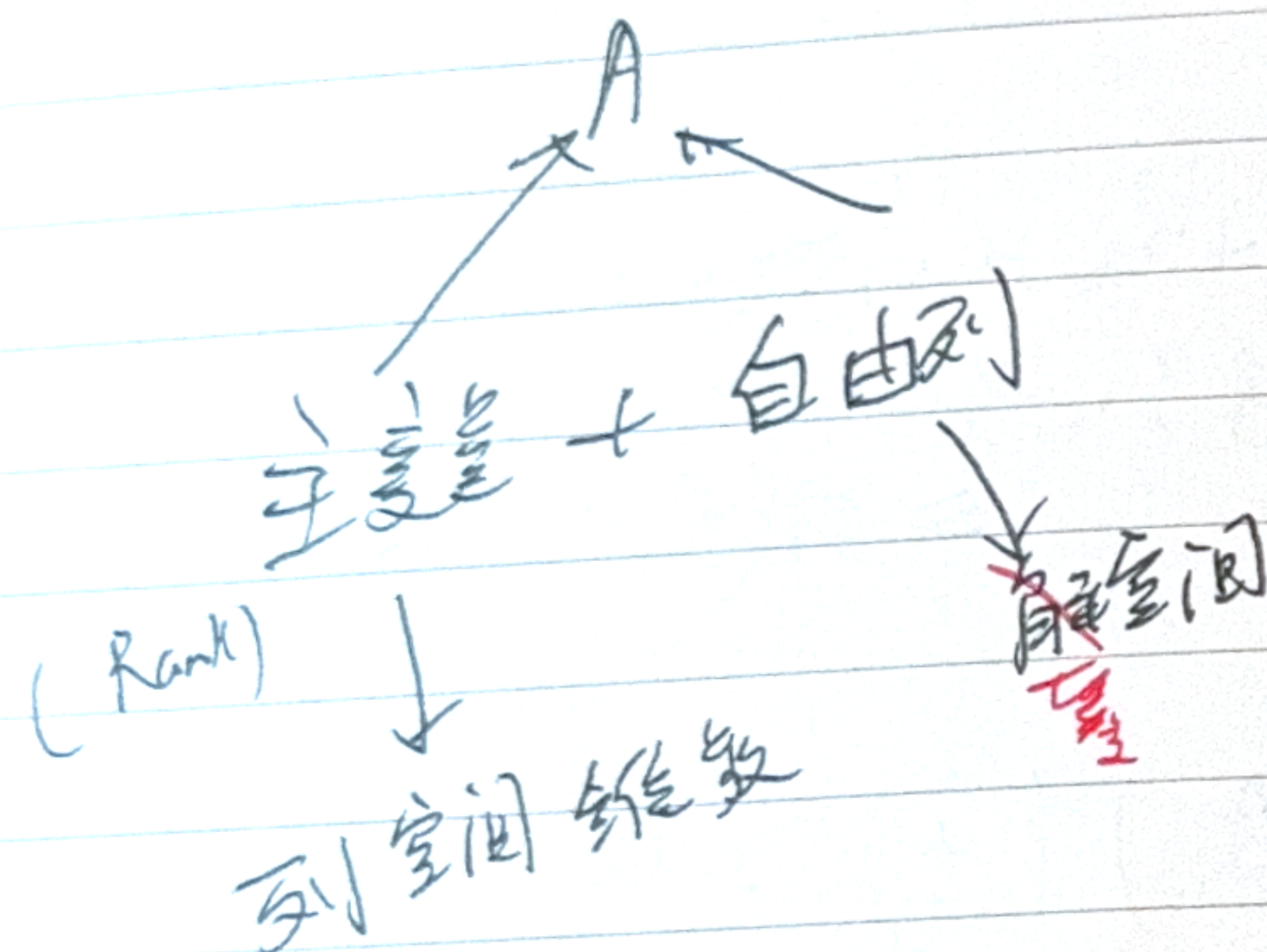
$\therefore$ 无解

$N(A)$
只有零向量

基:

1. 线性

2. 张成目标空间



$$Ax = b$$

A 变换 x

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3 + 4y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$



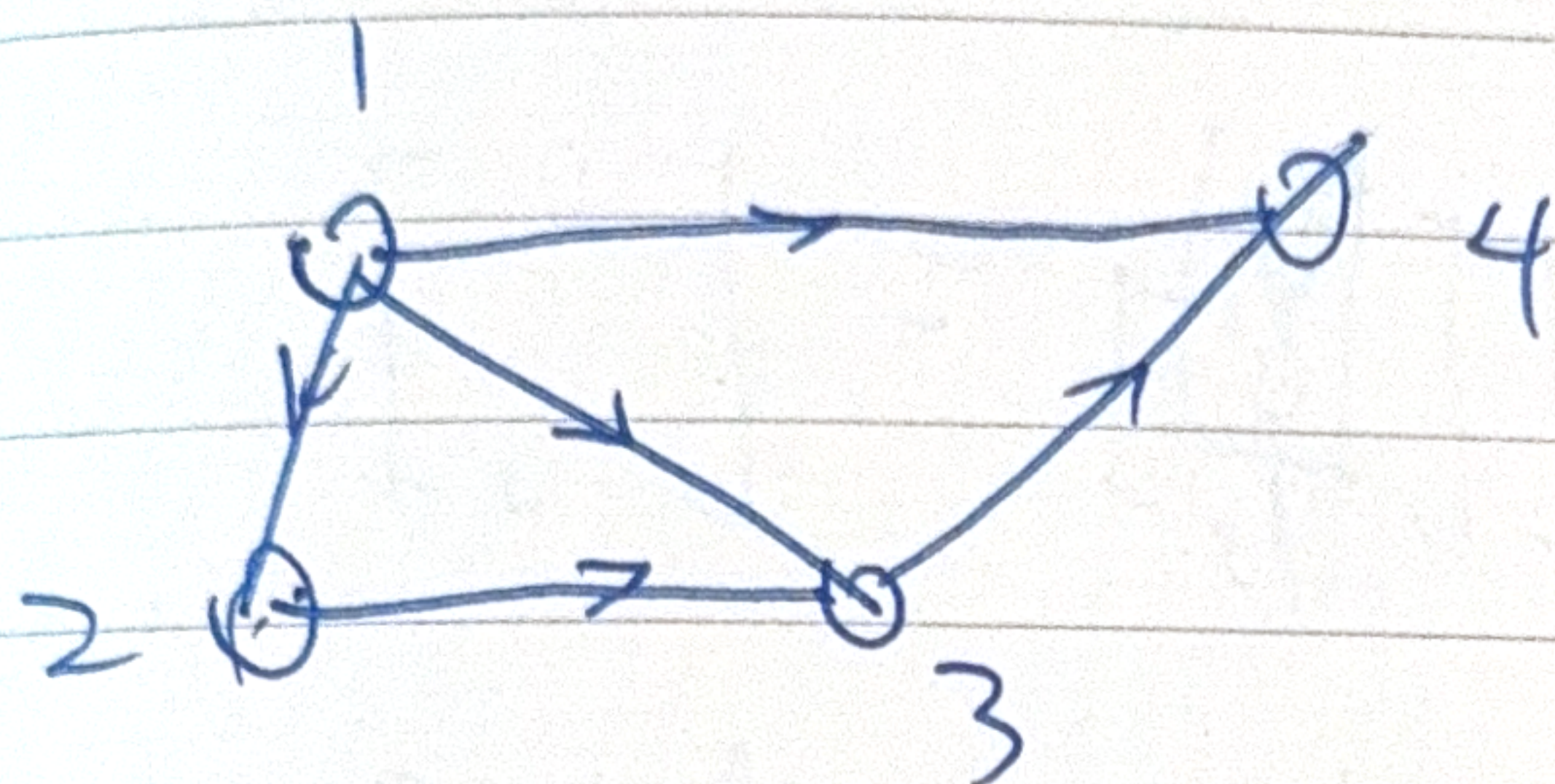
Mo Tu We Th Fr Sa Su

Memo No. _____

Date ____/____/____

Application: Graph

图论



Incidence Matrix:

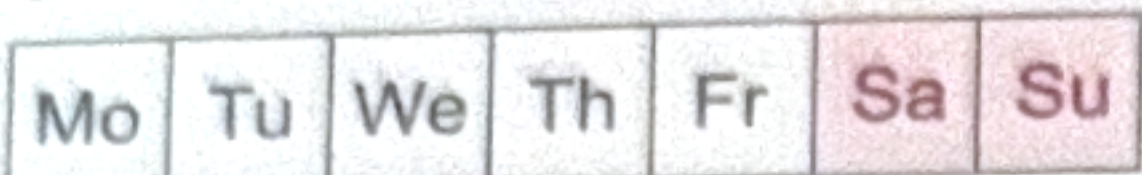
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1-2 \\ 1-3 \\ 2-3 \\ 1-4 \\ 3-4 \end{matrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$Ax = 0$$

Potential diff.

$$\begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 \\ x_4 - x_1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Date / /

$$A^t y$$

$$I - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$-g_1 - g_3 - 2g_4 = 0 \quad \cdot$$

KCL !!!

